

2 RS 46115

THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, JUNE/JULY 2023.

FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper V — LINEAR ALGEBRA

(W.e.f. 2020-21 Admitted batch)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Define Linear span of a set. Show that $L(S)$ is subspace of V .
సమితి యొక్క ఋజు వితస్తీని నిర్వచించండి. $L(S)$ అనునది V లో ఉపాంతరాళము అని చూపండి.
2. Prove that intersection of any two subspaces is also a subspace.
రెండు ఉపాంతరాళముల యొక్క చేదనము కూడా ఉపాంతరాళము అని చూపండి.
3. Show that $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ is a basis of $C^3(C)$.
 $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ అనునది $C^3(C)$ యొక్క ఆధారము అని చూపండి.
4. Let $V(F)$ be FDVS and $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ is a L.I. subset of V . Then show that either S itself a basis of V or S can be extended to form a basis of V .
 $V(F)$ అనునది పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము (FDVS) మరియు $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ అనునది V లో ఋజు స్వాతంత్ర్య ఉపసమితి అయితే S అనునది ఆధారము అవుతుంది లేదా దానిని V యొక్క ఆధారంగా విస్తరించవచ్చు అని చూపండి.
5. $T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ is defined by $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$. S.T. T is a linear transformation.
 $T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ కు $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ గా నిర్వచించిన T అనునది ఋజుపరివర్తన అని చూపండి.
6. If $U(F)$ and $V(F)$ are two vector spaces and $T: U \rightarrow V$ is a L.T. Then show that null space $N(T)$ is a subspace of $U(F)$.
 $U(F)$ మరియు $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళాలు మరియు $T: U \rightarrow V$ ఒక రేఖీయ పరివర్తన అయితే శూన్యంతరము $N(T)$ అనునది $U(F)$ కు ఉపాంతరాళము అని చూపండి.



7. Reduce the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ to Echelon form and hence find its rank.

పై మాత్రికను Echelon form కు మార్చి, కోటిని కనుక్కోండి.

8. Solve : $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$, $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$, $4x_1 = 3x_2 - x_3 = 3$, $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$.

పై వాటిని సాధించండి.

9. Prove that $S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$ is an orthonormal set in R^3 with standard inner product.

$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$ అనునది R^3 లోని క్రమ అంతర్గతము దృష్ట్యా లంబాబిలంబ సమితి అని చూపండి.

10. State and prove triangle inequality in I.P.S. $V(F)$.

I.P.S. $V(F)$ లో triangle inequality ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. State and prove $N-S$ condition for non-empty subset W of a vectorspace is a subspace $V(F)$.

$V(F)$ అను సదిశాంతరాళములు, శూన్యేతర ఉపసమితి W అనునది ఉపాంతరాళము కావడానికి అవశ్యక, పర్వాప్త $N-S$ నియమాలను నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

12. If w_1 and w_2 are two subspaces of $V(F)$ then show that $L(w_1 \cup w_2) = w_1 + w_2$.

$V(F)$ సదిశాంతరాళములు w_1, w_2 లు రెండు ఉపాంతరాళములు అయితే $L(w_1 \cup w_2) = w_1 + w_2$ అని చూపండి.

2 RS 46115



13. Show that any two basis of FVDS must have same number of elements.

ఒక పరిమిత పరిమాణాల సదిశాంతరాళము యొక్క ఏ రెండు ఆధారాలలోని మూలకాల సంఖ్య సమానము అని చూపండి.

Or

14. Let W_1 and W_2 are two subspaces of R^4 given by $W_1 = \{(a, b, c, d) / b - 2c + d = 0\}$
 $W_2 = \{(a, b, c, d) / a = d, b = 2c\}$. Find the basis and remain of $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ and hence find $\dim(W_1 + W_2)$

W_1, W_2 లు R^4 లో రెండు ఉపాంతరాళాలు. $W_1 = \{(a, b, c, d) / b - 2c + d = 0\}$

$W_2 = \{(a, b, c, d) / a = d, b = 2c\}$ అయితే $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ ల ఆధార మరియు పరిమాణాలు $\dim(W_1 + W_2)$ కనుగొని విలువ కనుక్కోండి.

15. State and prove Rank-nullity theorem.

కోటి- శూన్యతా సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

16. If $T: V_4(R) \rightarrow V_3(R)$ is L.T. defined by $T(a, b, c, d) = (a - b + c + d, a + 2c - d, a + b + 3c - 3d)$
for $a, b, c, d \in R$ verify $\rho(T) + \nu(T) = \dim V_4(R)$.

$T: V_4(R) \rightarrow V_3(R)$ అను ఋజు పరివర్తనను $T(a, b, c, d) = (a - b + c + d, a + 2c - d, a + b + 3c - 3d)$ గా నిర్వచిస్తే $a, b, c, d \in R$ $\rho(T) + \nu(T) = \dim V_4(R)$ ను సరిచూపండి.

17. Find Eigen values and eigen vectors of $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

పై మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక విలువలను మరియు లాక్షణిక మాత్రికను కనుగొనుము.

Or

18. State and prove Cayley-Hamilton theorem.

Cayley-Hamilton theorem ను నిర్వచించి నిరూపించండి.

19. State and prove Cauchy-Schwartz inequality.

Cauchy-Schwartz అసమానతను నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

20. State and prove Bessel's inequality.

Bessel's inequality ను నిర్వచించి నిరూపించండి.

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించుము.

2. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించుము.

3. Show that the function designed by $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ is continuous at $x = 0$.

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ మరియు $f(0) = 0$ గా గల ప్రమేయము $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది అని నిరూపించండి.

4. Discuss the continuity of the function $f(x) = \frac{x e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ if $x \neq 0$ and $f(x) = 1$ if $x = 0$; $f(x) = 1$.

పై ప్రమేయము $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అగునో, లేదా వివరించుము.

5. State and prove Lagrange's mean value theorem.

లెంగ్రాజ్ మాధ్యమ విలువల సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి, నిరూపించండి.

6. Verify Roll's theorem for $f(x) = \cos x$ in $[\pi, 5\pi]$

$f(x) = \cos x$ ప్రమేయమును $[\pi, 5\pi]$ పై రోలే సిద్ధాంతమును ధృవీకరించుము.

7. If $f(x) = x^3$ on $[0, 1]$ and $P = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$ then compute $U(P, f)$ and $L(P, f)$.

$f(x) = x^3$ మరియు $P = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$ గా ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని $[0, 1]$ పై తీసుకొనిన $U(P, f)$ మరియు $L(P, f)$ కనుగొనుము.

8. If $f: [a, b] \rightarrow R$ is a bounded function then show that $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.

$f: [a, b] \rightarrow R$ పరిబద్ధ ప్రమేయము అయితే $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ అని నిరూపించండి.

9. Prove that $\frac{1}{4} < \int_a^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$ by Integral calculus.

సమాకలన పద్ధతి నుండి $\frac{1}{4} < \int_a^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$ అని చూపండి.

10. If $f, g \in R[a, b]$ and prove that $f + g \in R[a, b]$ and

$$\int_a^b (f + g)(x) (dx) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$f, g \in R[a, b] \text{ అయిన } f + g \in R[a, b] \text{ మరియు } \int_a^b (f + g)(x) (dx) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

అవుతుంది అని చూపండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. Test for absolutely convergence or conditionally convergence of $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} n$.

$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} n$ యొక్క సంపూర్ణ అభిసరణను లేక ఖచ్చిత అభిసరణతను పరిశీలించండి.

Or

12. State and prove D-Alembert's ratio test.

డి-అంబర్ట్ నిష్పత్తి పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించుము.

13. State and prove Intermediate value theorem of continuity.

అవిచ్ఛిన్నతపై మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

14. Determine the constants a, b so that the function defined by
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{if } x \leq 1 \\ ax^2+b & \text{if } 1 < x < 3 \\ 5x+2a & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$
 is continuous everywhere.

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{if } x \leq 1 \\ ax^2+b & \text{if } 1 < x < 3 \\ 5x+2a & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$ గా నిర్వచించిన ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము అయితే a, b స్థిరాంకాలను

కనుగొనండి.

15. Discuss the differentiability at $x = 0$ of $f(x) = \frac{x(e^{1/x} - e^{-1/x})}{(e^{1/x} + e^{-1/x})}$ if $x \neq 0$ and $f(x) = 0$ if $x = 0$

పై ప్రమేయము యొక్క అవకలనీయతను $x = 0$ వద్ద చర్చించండి.

Or

16. State and prove Cauchy's mean value theorem

కోషి మధ్యమ విలువ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించండి.

17. If $f: [a, b] \rightarrow R$ is monotonic on $[a, b]$ then prove that f is integrable on $[a, b]$

$f: [a, b] \rightarrow R$ ప్రమేయం $[a, b]$ పై ఏకాక్షిప్తం అయితే $[a, b]$ పై f ప్రమేయము సమాకలనీయం అని చూపండి.

Or

18. Show that $f(x) = \cos x$ is integrable on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1$.

$f(x) = \cos x$ ప్రమేయం $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ మీద సమాకలనీయం అవుతుంది మరియు $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1$ అని చూపండి.

19. Show that $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right] = \log 3$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right] = \log 3$ అని చూపండి.

Or

20. State and prove fundamental theorem of Integral Calculus.

సమాకలనము యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతం లేక మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.
